Коммутатор
А как нам определить коммутатор двух элементов, f и g?
Разумеется, не как fg-gf – ведь в группе нет операции вычитания, только операция умножения.
Приходится как $[f, g] = fg\bar{f}\bar{g}$. Нетрудно заметить, что если $fg = gf$, то $[f, g] = e$.
Множество всех элементов g, коммутирующих с f, называют централизатором f.

Есть похожее определение: множество всех элементов g, коммутирующих с любым элементом f из подгруппы F, называют нормализатором F.

Математики взяли G и выделили там такую подгруппу:

$$G^1 = [G, G|$$

А затем

$$G^2 = [G_1, G_1|$$

А затем

$$G^3 = [G_2, G_2|$$

Такая последовательность называется производной.
А параллельно ещё одну последовательность (центрально убывающую) строят:

$$G_1 = [G, G|$$
$$G_2 = [G_1, G|$$
$$G_3 = [G_2, G|$$

Если вдруг для какого-то k $G^k = 1$ (это равносильно тому, что G^{k-1} является абелевой), то группа G называется разрешимой. Частный случай, когда уже $G^1 = 0$ – полупростая группа.
А вот если для какого-то k $G^k = 1$ (это равносильно тому, что G^{k-1} является абелевой), то группа G называется… тут очень изысканный термин

нильпотентной!

Конечные группы

Что нам нужно знать про конечные группы?
Разумеется, то, что число элементов в них называется порядком.

Если там есть какая-то подгруппа, что

Целая отдельная наука – конструирование для групп таблицы умножения. А наука прикольная:

e	a
a	e

e	a	b
a	b	e
b	e	a

e	a	b	c
a	e	c	b
b	c	e	a
c	b	a	e

Причём если для группы $\begin{array}{c|c} e & a \\ \hline a & c \end{array}$ очевидно, что никакой другой таблицы умножения быть не может, то для групп более высокого порядка это не очевидно.

К счастью, для сомневающихся есть теорема Кэли, которую мы доказывать не будем:
Всякая группа порядка n является подгруппой группы перестановок из n элементов.
Возьмём пример из Вики: группа циклических сдвигов из 4 элементов: является подгруппой перестановок из 4 элементов:

$$\varphi(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нам пришлось задействовать лишь 4 перестановки из 24.